22/2/2019

Ευθέα Αθροίσματα Υποχώρων

Έστω E: $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος και $V_1, V_2, \dots, V_k$ υπόχωροι του E. Το άθροισμα των υποχώρων $V_1, V_2, \dots, V_k$ είναι το σύνολο

$$V_1 + V_2 + \dots + V_k = \sum_{i=1}^{k} V_i = \{\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_k} \in E \,/\, \vec{x_i} \in V_i,\ 1 \le i \le k\}$$

Τότε το $\sum_{i=1}^{k} V_i$ είναι υπόχωρος του E και είναι ο μικρότερος υπόχωρος του E ο οποίος περιέχει τους υπόχωρους V_i, $i = 1, \dots, k$

Παρατήρηση: (1) Έστω ότι $V_i = \langle B_i \rangle$, $i = 1, \dots, k$. Τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = \left\langle \bigcup_{i=1}^{k} B_i \right\rangle$$

(2) Έστω ότι $\kappa=2$. Τότε $\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2-\dim_K(V_1\cap V_2)$

Άρα $\dim_K(V_1+V_2)\le \dim_K V_1+\dim_K V_2$ (*)

Γενικότερα: αν $\kappa\ge 2$, τότε: $\dim_K \sum_{i=1}^{k} V_i \le \sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i$

Πράγματι:
$$\begin{aligned}\dim_K \sum_{i=1}^{k} V_i &= \dim_K(V_1+V_2+\dots+V_k)\\ &\overset{(*)}{\le} \dim_K V_1+\dim_K(V_2+\dots+V_k)\\ &\overset{(*)}{\le} \dim_K V_1+\dim_K V_2+\dim_K(V_3+\dots+V_k)\\ &\le \dots\dots\\ &\le \dim_K V_1+\dim_K V_2+\dots+\dim_K V_k\end{aligned}$$

Πρόβλημα: Πότε η ανισότητα $\dim_K \sum_{i=1}^{k} V_i \le \sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i$ είναι ισότητα?

- Αν $\vec{x}\in\sum_{i=1}^{k} V_i$, τότε $\vec{x}=\vec{x}_1+\vec{x}_2+\dots+\vec{x}_k$, όπου $\vec{x}_i\in V_i$, $1\le i\le k$

- Αν $\vec{x}=\vec{x}_1'+\vec{x}_2'+\dots+\vec{x}_k'$, όπου $\vec{x}_i'\in V_i$, $1\le i\le k$, τότε πότε ισχύει ότι $\vec{x}_i=\vec{x}_i'$, $1\le i\le k$?

Ορισμός: Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{k} V_i$ καλείται ευθύ άθροισμα $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ αν $\vec{x}_1+\vec{x}_2+\dots+\vec{x}_k=\vec{x}_1'+\vec{x}_2'+\dots+\vec{x}_k'$, τότε:
$\vec{x}_i=\vec{x}_i'$, $1\le i\le k$, όπου $\vec{x}_i,\vec{x}_i'\in V_i$, $1\le i\le k$

Μοναδικότητα γραφής διανύσματος του $\sum_{i=1}^{k} V_i$ ως άθροισμα διανυσμάτων των V_i, $1\le i\le k$

Αν το άθροισμα $\sum_{i=1}^{k} V_i$ είναι ευθύ, θα γράφουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i=\bigoplus_{i=1}^{k} V_i = V_1\oplus V_2\oplus\dots+V_k$$

Παρατήρηση: $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2 \iff V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

Πρόταση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1) $\sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$

2) $\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_k} = \vec{0}$, $\vec{x_i} \in V_i$, $1 \le i \le k \Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \dots = \vec{x_k} = \vec{0}$

3) Για κάθε $i=1,\dots,k$: $V_i \cap (V_1 + V_2 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k) = \{\vec{0}\}$

(παίρνω το άθροισμα των υποχώρων εκτός από το V_i, η συνθήκη όταν $k>2$)

Απόδειξη: ① ⇒ ② Έστω ότι $\sum_{i=1}^{k} V_i$ και έστω ότι:

$\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_k} = \vec{0}$, $\vec{x_i} \in V_i$, $1 \le i \le k$ $\Rightarrow \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0}$, $\vec{0} \in V_i$, $1 \le i \le k$ $\overset{\text{ομοίως}}{\Longrightarrow} \vec{x_1} = 0, \vec{x_2} = 0, \dots, \vec{x_k} = \vec{0}$

μον. γραφής

② ⇒ ③ Έστω ότι ισχύει η συνθήκη (2) και έστω $\vec{x} \in V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} V_j$, όπου $i=1,\dots,k$. Τότε $\vec{x} \in V_i$ και $\vec{x} \in \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} V_j \Rightarrow \vec{x} = \vec{x_1} + \dots + \vec{x_{i-1}} + \vec{x_{i+1}} + \dots + \vec{x_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{\vec{x_1}}_{\in V_1} + \dots + \underbrace{\vec{x_{i-1}}}_{\in V_{i-1}} + \underbrace{(-\vec{x})}_{\in V_i} + \underbrace{\vec{x_{i+1}}}_{\in V_{i+1}} + \dots + \underbrace{\vec{x_k}}_{\in V_k} = \vec{0} \overset{(2)}{\Rightarrow} \vec{x} = \vec{0}$

Άρα: $\forall i=1,\dots,k: V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} V_j = \{\vec{0}\}$ και άρα ισχύει η σχέση (3)

③ ⇒ ① Έστω ότι ισχύει η σχέση (3) και έστω ότι:

$\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_k} = \vec{x_1}' + \vec{x_2}' + \dots + \vec{x_k}'$, $\vec{x_i}, \vec{x_i}' \in V_i$, $1 \le i \le k$. Για κάθε $i=1,\dots,k$ τότε:

$$\underbrace{\vec{x_i} - \vec{x_i}'}_{\in V_i} = \underbrace{\underbrace{(\vec{x_1}' - \vec{x_1})}_{\in V_1} + \dots + \underbrace{(\vec{x_{i-1}}' - \vec{x_{i-1}})}_{\in V_{i-1}} + \underbrace{(\vec{x_{i+1}}' - \vec{x_{i+1}})}_{\in V_{i+1}} + \dots + \underbrace{(\vec{x_k}' - \vec{x_k})}_{\in V_k}}_{\in \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} V_j}$$

Άρα $\vec{x_i} - \vec{x_i}' \in V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{k} V_j \overset{(3)}{=} \{\vec{0}\}$. Άρα $\vec{x_i} - \vec{x_i}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{x_i} = \vec{x_i}'$,

$\forall i=1,\dots,k$, δηλαδή έχουμε μοναδικότητα της γραφής $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ δηλαδή ισχύει το (1)

Παράδειγμα: 1 Έστω ότι $\beta = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E.
Θέτουμε $V_i = \langle \vec{e_i} \rangle$, $1 \le i \le n$. Τότε $E = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$

β: βάση $\Rightarrow \forall \vec{x} \in E : \vec{x} = \underbrace{\lambda_1 \vec{e_1}}_{\in V_1} + \underbrace{\lambda_2 \vec{e_2}}_{\in V_2} + \dots + \underbrace{\lambda_n \vec{e_n}}_{\in V_n}$.

Άρα $\vec{x} \in V_1 + \dots + V_n$, δηλαδή $E = V_1 + V_2 + \dots + V_n$

Έστω ότι $\vec{x_1} + \vec{x_2} + \dots + \vec{x_n} = \vec{0}$

$\left.\begin{array}{l}\vec{x_i} \in V_i = \langle \vec{e_i} \rangle \Rightarrow \vec{x_i} = \lambda_i \vec{e_i}, \text{ όπου } \lambda_i \in \mathbb{K} \\ 1 \le i \le k\end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \dots + \lambda_n \vec{e_n} = \vec{0} \xrightarrow{\beta: ΓΑ} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \vec{0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x_1} = \vec{x_2} = \dots = \vec{x_n} = \vec{0}$

Άρα : $V_1 + V_2 + \dots + V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n$

2 $M_n(\mathbb{K})$: Ο $\mathbb{K}$-διανυσματικός χώρος των $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το $\mathbb{K}$.

- $S_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \,/\, {}^tA = A\}$: υπόχωρος των $n \times n$ συμμετρικών πινάκων
- $A_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \,/\, {}^tA = -A\}$: υπόχωρος των $n \times n$ αντισυμμετρικών πινάκων (τα στοιχεία της διαγωνίου είναι μηδέν)

$$\left\{\begin{array}{l} {}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA \\ {}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA) \end{array}\right\}$$

Τότε: $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$

$$\forall A \in M_n(\mathbb{K}) : \left.\begin{array}{l} A + {}^tA \in S_n(\mathbb{K}) \\ A - {}^tA \in A_n(\mathbb{K}) \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}(A + {}^tA) \in S_n(\mathbb{K}) \\ \frac{1}{2}(A - {}^tA) \in A_n(\mathbb{K}) \end{array}\right. \text{ και τότε}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + {}^tA)}_{\in S_n(\mathbb{K})} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - {}^tA)}_{\in A_n(\mathbb{K})} \Rightarrow M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) + A_n(\mathbb{K}) \quad (1)$$

Έστω ότι $A \in S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} {}^tA = A \\ {}^tA = -A \end{array}\right. \Rightarrow A = -A \Rightarrow 2A = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = 0$. Άρα $S_n(\mathbb{K}) \cap A_n(\mathbb{K}) = \{\vec{0}\}$ (2)

Από τις (1) και (2) προκύπτει : $M_n(\mathbb{K}) = S_n(\mathbb{K}) \oplus A_n(\mathbb{K})$

③ $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f: \text{συνάρτηση} \}$

$A(\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x) = f(-x), \forall x\in\mathbb{R} \}$ άρτιες συναρτήσεις

$\Pi(\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \,/\, f(x) = -f(-x), \forall x\in\mathbb{R} \}$ περιττές συναρτήσεις

Τότε $F(\mathbb{R},\mathbb{R}) = A(\mathbb{R}) \oplus \Pi(\mathbb{R})$

$\forall f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θεωρούμε $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε:

$g(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)$ και $h(x) = \frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right)$

Τότε $g\in A(\mathbb{R})$ και $h\in\Pi(\mathbb{R})$ και $f = g+h$

i) Δείχνω ότι κάθε συνάρτηση είναι άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής και ii) Δείχνω ότι η f είναι η μηδενική για να είναι το άθροισμα ευθύ

Παράδειγμα $V_1 = \langle (1,-1,0) \rangle = \{ (x,-x,0)\in\mathbb{R}^3 / x\in\mathbb{R} \}$

$V_2 = \langle (0,1,-1) \rangle = \{ (0,x,-x)\in\mathbb{R}^3 / x\in\mathbb{R} \}$

$V_3 = \langle (-1,0,1) \rangle = \{ (-x,0,x)\in\mathbb{R}^3 / x\in\mathbb{R} \}$

- $(x,y,z)\in V_1\cap V_2 \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (a,-a,0) \\ (x,y,z) = (0,b,-b) \end{cases} \Rightarrow a=b=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \boxed{V_1\cap V_2 = \{\vec{0}\}}$

- $(x,y,z)\in V_1\cap V_3 \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (a,-a,0) \\ (x,y,z) = (-b,0,b) \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \boxed{V_1\cap V_3 = \{\vec{0}\}}$

- $(x,y,z)\in V_2\cap V_3 \Rightarrow \begin{cases} (x,y,z) = (0,a,-a) \\ (x,y,z) = (-b,0,b) \end{cases} \Rightarrow a=b=0$

$\Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow \boxed{V_2\cap V_3 = \{\vec{0}\}}$

Όμως το άθροισμα $V_1+V_2+V_3$ δεν είναι ευθύ, διότι:

$\underbrace{(1,-1,0)}_{\in V_1} + \underbrace{(0,1,-1)}_{\in V_2} + \underbrace{(-1,0,1)}_{\in V_3} = (0,0,0)$

και $(1,-1,0) \neq (0,0,0)$ $\quad$ $V_1+V_2+V_3$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

$(0,1,-1) \neq (0,0,0)$ $\quad$ με διάσταση 2

$(-1,0,1) \neq (0,0,0)$

Παρατήρηση: Αν $V_1, V_2, \dots, V_k$: υπόχωροι του E, τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \Rightarrow V_i \cap V_j = \{\vec{0}\}, \text{ αν } i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k$$

$\not\Leftarrow$ δεν ισχύει γενικά

Γιατί ικανοποιείται το αυτό?

$$\forall i = 1, \dots, k : V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_j = \{\vec{0}\}$$

Αν $1 \leq i \neq j \leq k$, τότε $V_i \cap V_j \subseteq V_i \cap \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_j = \{\vec{0}\}$ διότι

$$V_j \subseteq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} V_j$$

Άσκηση: Έστω $V_1, V_2, \dots, V_k$ υπόχωροι του $\mathbb{K}$-διανυσματικού χώρου E. Τότε:

$$\sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, k : V_i \cap (V_{i+1} + V_{i+2} + \dots + V_k) = \{\vec{0}\}$$

→ Έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} E < \infty$

Αν $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ είναι υπόχωροι του E, τότε $\dim_{\mathbb{K}} V_i < \infty$ και τότε

$$\dim_{\mathbb{K}} \sum_{i=1}^{k} V_i \leq \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} V_i$$

Θεώρημα: Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:

1) $\sum_{i=1}^{k} V_i = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$

2) Αν β_i: βάση του V_i, $1 \leq i \leq k$, τότε: $\bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ βάση του $\sum_{i=1}^{k} V_i$

3) $\dim_{\mathbb{K}} \sum_{i=1}^{k} V_i = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} V_i$

Απόδειξη: Για $\kappa=2$ δηλαδή έχουμε δύο υπόχωρους V_1 και V_2

$\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Έστω β_1 βάση του V_1 και β_2 βάση του V_2. Θα δείξω ότι $\beta_1\cup\beta_2$: βάση του V_1+V_2. Έστω ότι $\beta_1=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_r}\}$ και $\beta_2=\{\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}\}$

Επειδή $V_1=\langle\beta_1\rangle$ και $V_2=\langle\beta_2\rangle$. Τότε γνωρίζουμε ότι:
$V_1+V_2=\langle\beta_1\cup\beta_2\rangle$

Έστω ότι: $\underbrace{\lambda_1\vec{e_1}+\dots+\lambda_r\vec{e_r}}_{\in V_1}+\underbrace{\lambda_{r+1}\vec{e_{r+1}}+\dots+\lambda_n\vec{e_n}}_{\in V_2}=\vec{0}$

Επειδή το άθροισμα V_1+V_2 είναι ευθύ και τα $\lambda_1\vec{e_1}+\dots+\lambda_r\vec{e_r}\in V_1$ και $\lambda_{r+1}\vec{e_{r+1}}+\dots+\lambda_n\vec{e_n}\in V_2$ έπεται ότι:

$$\begin{cases}\lambda_1\vec{e_1}+\dots+\lambda_r\vec{e_r}=\vec{0} \Longrightarrow \{\vec{e_1},\dots,\vec{e_r}\}\ \Gamma.A\\ \lambda_{r+1}\vec{e_{r+1}}+\dots+\lambda_n\vec{e_n}=\vec{0}\Longrightarrow\{\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}\}\ \Gamma A\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=\dots=\lambda_r=0\\ \lambda_{r+1}=\dots=\lambda_n=0\end{cases}\Bigg|\Rightarrow \beta_1\cup\beta_2=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_r},\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}\}\ \Gamma.A$$

Άρα $\beta_1\cup\beta_2$: βάση του V_1+V_2.

$\boxed{(2)\Rightarrow(3)}$ Έστω ότι $\beta_1=\{\vec{e_1},\dots,\vec{e_r}\}$ βάση του V_1 και $\beta_2=\{\vec{e_{r+1}},\dots,\vec{e_n}\}$ βάση του V_2. Τότε $\beta=\beta_1\cup\beta_2$: βάση του V_1+V_2

Θα δείξω ότι $\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2$ Πρέπει να βρω ότι $\beta_1\cap\beta_2=\varnothing$

Όμως $\dim_K(V_1+V_2)=|\beta|=|\beta_1\cup\beta_2|$ (*)

Γενικά ισχύει: Αν $X,Y\subseteq A$, τότε $|X\cup Y|=|X|+|Y|-|X\cap Y|$

Αν $\vec{x}\in\beta_1\cap\beta_2\Rightarrow\begin{cases}\vec{x}\in\beta_1\Rightarrow\vec{x}=\vec{e_i}, & 1\le i\le r\\ \vec{x}\in\beta_2\Rightarrow\vec{x}=\vec{e_j} & r+1\le j\le n\end{cases}$

Τότε: $\vec{e_i},\vec{e_j}\in\beta$: ΓΑ και $1\cdot\vec{e_i}+(-1)\vec{e_j}=\vec{0}$ άτοπο, διότι $\vec{e_i},\vec{e_j}$ είναι ΓΑ ως στοιχεία ενός ΓΑ συνόλου. Άρα $\beta_1\cap\beta_2=\varnothing$.

Τότε: $|\beta_1\cup\beta_2|=|\beta_1|+|\beta_2|=\dim_K V_1+\dim_K V_2$ (**)

(*) (**) $\Rightarrow\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2$, δηλαδή ισχύει η (3)

$\boxed{(3)\Rightarrow(1)}$ Υποθέτουμε ότι $\left.\begin{array}{l}\dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2\\ \dim_K(V_1+V_2)=\dim_K V_1+\dim_K V_2-\dim_K(V_1\cap V_2)\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow V_1\cap V_2=\{\vec{0}\}\Rightarrow V_1+V_2=V_1\oplus V_2$, δηλαδή ισχύει το (1)

Αν $k>2$ τότε η απόδειξη όμοια.

Αν $X_1, \ldots, X_k \subseteq A$ τότε $X_i \cap X_j = \emptyset$ αν $i \neq j \Rightarrow$

$\Rightarrow |X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|$

Πόρισμα: Έστω ότι $V_1, V_2, \ldots, V_k$ υπόχωροι του E, όπου $\dim_K E < \infty$

Τότε: $E = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k \Leftrightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 + \ldots + V_k = E \\ \dim_K\left(\sum_{i=1}^{k} V_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i \end{cases}$

Απόδειξη: "$\Rightarrow$" Αν $E = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_k$, τότε ιδιαίτερα $E = V_1 + V_2 + \ldots + V_k$ και από το Θεώρημα, έπεται ότι:

$$\dim_K\left(\sum_{i=1}^{k} V_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \dim_K V_i$$

"$\Leftarrow$" Προφανές.